L3 SM UE504P **Université de Tours** **Année 2011-2012**

Méthodes mathématiques pour la physique

08/11/2011 **durée du contrôle: 2h**

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x)$ de période 2π définie par $f(0) = 1$ et

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} \qquad \text{pour } 0 < x < 2\pi.$$

- Tracer le graphe de $f(x)$.
- Pour quelles valeurs de x la série de Fourier $S_f(x)$ converge? vers quoi?
- Développer $f(x)$ en série de Fourier adaptée aux propriétés de parité.
- En utilisant cette série, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$. Peut-on obtenir le même résultat de façon plus élémentaire?
- En utilisant l'identité de Parseval, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-\frac{1}{4}\right)^2}$

Exercice 2. Calculer explicitement les polynômes orthogonaux $p_0(x)$, $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sur l'intervalle $I = [0, 2\pi]$, associés à la fonction poids $w(x) = \sin\frac{x}{2}$ (en précisant la normalisation choisie).

Exercice 3. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 1,$$

vérifiant les conditions initiales $y(1) = y'(1) = 0$. Vérifier le résultat.

Exercice 4. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de la même équation différentielle

$$4x^2y''(x) + 4xy'(x) - y(x) = 1,$$

vérifiant les conditions limites $y(1) = 0$, $y'(4) = 0$. Expliquer pourquoi la méthode des fonctions de Green n'est pas appliquable aux conditions limites $y(1) = 0$, $5y(4) = 24y'(4)$.